Prostoročas a gravitace

prostoročas – 4 dim. varieta M
grav. pole – popsáno lorentzovskou metrikou g na M

akce (minimální OTR)

$$S_{GR}[g] = \frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa c}\int_{\Omega}(R - 2\Lambda)\, g^{\frac{1}{2}} +$$

pohybové rovnice

$$\frac{\delta S}{\delta g} = 0 \qquad S = S_{GR} + S_{HMOTA} \qquad \Rightarrow$$

$$Ric - \frac{1}{2} R g + \Lambda g = \varkappa T$$

variace akce

$$\frac{2c}{g^{\frac{1}{2}}}\, g \cdot \frac{\delta S_{GR}}{\delta g}\, g = - \frac{2c}{g^{\frac{1}{2}}}\frac{\delta S_{GR}}{\delta g^{-1}} = -\frac{1}{\varkappa}\left(Ric - \frac{1}{2} R g + \Lambda g\right)$$

tenzor energie hybn.

$$T = -\frac{2c}{g^{\frac{1}{2}}}\frac{\delta S_{HMOTA}}{\delta g^{-1}}$$

symetrie
všě je invariantní vůči akci difeomorfismů variety M

S_{GR} je invariantní sama o sobě

$$S_{GR}[g] = S[f^* g]$$

$$g \to \tilde{g} = f^* g \approx g + \delta g \qquad \delta g_{\alpha\beta} = \nabla_{(\alpha}\xi_{\beta)} \qquad \xi \text{ generátor } f$$

$$\int \frac{\delta S_{GR}}{\delta g_{\alpha\beta}}\, \delta g_{\alpha\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad g^{-1\mu\nu}\nabla_{\mu}\left(Ric_{\nu\alpha} - \frac{1}{2} R g_{\nu\alpha} + \Lambda g_{\nu\alpha}\right) = 0 \qquad \Downarrow$$

lokální zákon zachování tenz. energie-hybn.

$$g^{-1\mu\nu}\nabla_{\mu} T_{\nu\alpha} = 0$$

Skalární pole

popsáno reálnou fcí na M

$\phi : M \to \mathbb{R}$

akce

volné pole:

$$S_{SP}[g,\phi] = -\frac{1}{2c}\frac{\gamma_0}{\eta^2}\int \left(d\phi\cdot g^{-1}\cdot d\phi + \frac{c^2}{\hbar^2}\mu^2\phi^2 \right) g^{\frac{1}{2}}$$

γ_0 - konst. charakterizující jednotky asociované se skal. polem

$e_{pl} = \sqrt{\gamma \hbar c}$ planckovský skalární náboj.

$\phi_{pl} = \frac{1}{\sqrt{\kappa \gamma}}$ planckovská velikost sk. pole

$[e_{pl}] = S$ $[\phi_{pl}] = kg\, m^2 s^{-2} S^{-1}$ $[\gamma_0] = kg^{-1} m^{-3} s^2 S^2$

η - ~~vazbová~~ normalizační konstanta v planck. jedn. $[\eta] = 1$

samointerakce

$$S_{SPI}[g,\phi] = \int U(\phi)\, g^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(jednotky ?)}$$

U - lokální fce, typicky polynom

minimální grav. interakce

konformní:

$$S_{GRkonf}[g,\phi] = S_{GR}[g] - \frac{1}{2c}\frac{\gamma_0}{\eta^2}\int \xi R\phi^2 g^{\frac{1}{2}}$$

dilaton:

$$S_{GRdil}[g,\phi] = \frac{1}{2\kappa c}\int \exp\left(-\frac{\cancel{\kappa\gamma}}{\eta^2}\phi^2\right) R\, g^{\frac{1}{2}} \qquad (??)$$

pohybové rovnice (minimální grav. interakce)

$$\frac{\delta S}{\delta\phi} = 0 \qquad S = S_{GR} + S_{SP} + S_{OSTATNÍ}$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{\eta}\left[\Box + \frac{c^2}{\hbar^2}\mu^2\right]\phi = \frac{\cancel{c}}{\gamma_0} J$$

variace akce:

$$\frac{\delta S_{SP}}{\delta\phi} = -\frac{\gamma_0}{c} g^{\frac{1}{2}}\left[\Box + \frac{c^2}{\hbar^2}\mu^2\right]\phi \qquad \Box = -\nabla\cdot g^{-1}\cdot d$$

zdroj pole

$$J = \frac{\eta}{g^{\frac{1}{2}}}\frac{\delta S_{OSTATNÍ}}{\delta\phi}$$

J je v obecnosti ϕ-závislé a nezachovává se

tenzor energie hybnosti:

$$T_{SP} = \frac{\gamma_0}{\eta^2}\left(d\phi\, d\phi - \frac{1}{2} g \left(d\phi\cdot g^{-1}\cdot d\phi + \mu^2\phi^2 \right)\right)$$

Vnitřní stupně volnosti

Vedle prostoročasového rozložení má pole popisující hmotu ještě další, lokální stupně volnosti

Typicky je můžeme popsat přidáním ke každému bodu prostoročasu kopie vektorového prostoru charakterizujícího tyto stupně volnosti.

Prostor vnitřních stupňů volnosti = vekt. bundle AM

Pole popisující hmotu = řez bundlu AM

Na prostoru vnitř. st. vol. máme obvykle danou určitou geom. strukturu (metrika na fibrech, nábojové sdružení, ...)

Vedle toho potřebujeme geom. strukturu svazující fibry v různých bodech prostoročasu – kalibrační pole = kov. derivace na AM

Obvykle nemáme přístup přímo k vnitř. stup. volnosti. Teorie má stejný tvar, pokud změníme bázi v prost. vnitř. stup. vol. – pokud provedeme kalibrační transformaci.

Vnitřní stupně volnosti a kalibrační symetrie

Hmota může být charakterizována vedle prostoročasového rozložení též dalšími lokálními stupni volnosti. Pro jejich popis musíme přidat v každém bodě prostoročasu tzv. prostor vnitřních stupňů volnosti. Tento prostor by měl být všude "stejný" – přesněji isomorfní tzv. standardnímu prostoru vnitřních stupňů volnosti.

Vnitřní stupně volnosti nebývají přímo pozorovatelné – pouze skrze úhrnné veličiny typu tensor energie-hybnosti. Proto je většinou jejich popis invariantní vůči grupě transformací – tzv. kalibrační grupě.

Vnitřní stupně volnosti se stejnou kalibrační grupou lze vždy popisovat vůči umněle zvolené bázi – tzv. kalibrační bázi (či trivializaci). Kalibrační báze odpovídá přístroji umožňujícímu přímo měřit vnitřní stupně volnosti. Vůči této bázi můžeme vnitř. stupně volnosti popisovat přímo standardním prostorem vnitřních stupňů volnosti. V takovémto popisu však zamrazíme invarianci vůči kalibračním transformacím.

Plný popis však musí ~~záviset~~ na volbě kalibr. báze. Pokud zvolíme jinou kalibrační bázi spojenou s původní kalibrační transformací, musíme dostat ekvivalentní popis. Nemáme totiž k dispozici preferovaný přístroj měřící vnitřní stupně volnosti.

Přirozená mat. struktura – hlavní a asociované fiber bundly se str. grupou.

Kalibrační grupa G

Lieova grupa

Prostor kalibračních bází $\mathrm{Sect}(\mathbb{P}M)$

$\mathbb{P}M$ je hlavní f. bundle nad M se strukt. gr. G

Lokální kalibrační grupa $\mathrm{Sect}(GM)$

$GM = \mathrm{Ad}_{\mathbb{P}} M$ kalibr. transformace $g \in \mathrm{Sect}\, G$

Lokální kalibrační algebra $\mathrm{Sect}(\mathfrak{g}M)$

$\mathfrak{g}M = \mathrm{ad}_{\mathbb{P}} M$

Stand. prostor vnitřních stupňů volnosti: $\mathbb{A}$

$\mathbb{A}$ prostor s akcí T kalibrační gr. G

$T_g : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ $g \in G$ $T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$

typicky vektorový prostor s reprezentací grupy G

Prostor vnitřních stupňů volnosti $\mathbb{A}M$ typu $(\mathbb{A}, T)$

$\mathbb{A}M = (T_{\mathbb{P}} \mathbb{A}) M$

odpovídá kopii $\mathbb{A}$ v každém bodě prostoročasu M s lokální akcí lokální kalibr. gr.

$\phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{A}M \quad \to \quad T_g \phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{A}M \qquad g \in \mathrm{Sect}\, GM$

hodnota vnitř. stupňů volnosti vůči kalibr. bázi $E \in \mathrm{Sect}(\mathbb{P}M)$

$\phi[E]|_x \in \mathbb{A} \qquad \phi|_x = T_{E|_x}\, \phi[E]|_x$

Symetrie

Všechny měřitelné veličiny musí být invariantní vůči akci lokální kalibrační grupy

Kalibrační pole

Pole zprostředkující interakci mezi hmotou s vnitřními stupni volnosti s příslušnou kalibrační grupou.
Charakterizuje geometrii na prostoru kalibračních bazí a tím určuje jak spolu souvisí vnitřní stupně volnosti v různých prostoročasových bodech.
Budeme ho popisovat konexí na hlavním f. b. PM, která nám indukuje kovariantní derivaci na asociovaných vekt. bundlech.
Intensita kalib. pole (netriviální míra pole "nezávislá" na kalibraci) je dána křivostí konexe.
V případě plo prosté kal. gr. můžeme kal. pole popisovat kov. derivací na Lieově algebře kal. grupy.

Neábelovská kalibrační pole

Kalibrační pole jako kovariantní derivace, potenciál

Kalibrační grupa G - poloprostá Lieova grupa

$\Rightarrow$ ad je věrná repr. gr. G na $\mathfrak{g}$

Kalibrační pole =

- konexe na PM
- ekvivalentní kov. der. na $\mathfrak{g}M$ konzist. se strukt. Lieovy alg.

tj. kalibr. pole je kov. der na $\mathfrak{g}M$ splňující

$$D_\mu\, c_{mn}{}^{a} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad D_\Gamma\, K_{mn} = 0\,, \quad D[\alpha,\beta] = [D\alpha,\beta]+[\alpha,D\beta]$$

Potenciál

zvolíme-li trivializaci, tj. souřadnicovou kov. der.

$E \in \mathrm{Sect}\, PM$ $\quad \partial$ takové, že $\quad \partial h\, E = 0$

$\Rightarrow$ ∂ bez křivosti $\quad \hat{F}[\partial] = 0$

pak potenciál $\mathcal{A}_\mu$ kal. pole D je dán jako

$$D = \partial \oplus \frac{Q_{KP}}{\hbar c}\mathcal{A} \qquad \text{tj.} \qquad D_\mu \alpha^{m} = \partial_\mu \alpha^{m} + \frac{Q_{KP}}{\hbar c}[\mathcal{A}_\mu, \alpha]$$

Tenzor křivosti kal. pole $F^{m}_{\mu\nu}$

$$F^{m}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \wedge \mathcal{A}^{m}_\beta + \frac{Q_{KP}}{\hbar c}[\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\beta]^{m} \qquad \text{tj.} \quad D_\alpha \wedge D_\beta\, \alpha^{m} = \frac{Q_{KP}}{\hbar c}[F_{\alpha\beta}, \alpha]^{m}$$

Akce a pohybové rovnice pro kalib. pole

akce:

$$S_{KP}[D, g] = -\frac{1}{4}\frac{\varepsilon_{KP}}{c}\int \mathcal{F}^a_{\kappa\lambda}\,\mathcal{F}^b_{\mu\nu}\,g^{-1\kappa\mu}\,g^{-1\lambda\nu}\,K_{ab}\,g^{\frac{1}{2}}$$

pohybové rovnice

$$\frac{\delta S}{\delta D} = 0 \qquad S = S_{KP} + S_{GR} + S_{OSTATNÍ}$$

$\Downarrow$

$$g^{-1\alpha\beta}\left(D_\mu \mathcal{F}^m_{\beta\nu}\right) g^{-1\mu\nu} = \frac{c}{\varepsilon_{KP}} J^{\alpha m} \qquad \mathcal{F} = {}^{\nabla}d\mathcal{A} + [\mathcal{A},\mathcal{A}]$$

variace akce

$$\frac{\delta S_{KP}}{\delta D^m_\alpha} = \frac{\varepsilon_{KP}}{c} K_{mn}\, g^{-1\alpha\beta}\left(D_\mu \mathcal{F}^n_{\beta\nu}\right) g^{-1\mu\nu}\, g^{\frac{1}{2}}$$

$$D \to D + \delta\mathcal{A} \qquad \mathcal{F} \to \mathcal{F} + D\wedge\delta\mathcal{A} + O(\delta\mathcal{A})^2 \Rightarrow \delta\mathcal{F} = D\wedge\delta\mathcal{A}$$

$$\delta S = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_{KP}}{c}\int \left(D_\kappa\wedge\delta\mathcal{A}^m_\lambda\right)\mathcal{F}^n_{\mu\nu}\,K_{mn}\,g^{-1\kappa\mu}\,g^{-1\lambda\nu}\,g^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{\varepsilon_{KP}}{c}\int \left(D_\kappa\,\delta\mathcal{A}^m_\lambda\right)\mathcal{F}^n_{\mu\nu}\,K_{mn}\,g^{-1\kappa\mu}\,g^{-1\lambda\nu}\,g^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\varepsilon_{KP}}{c}\int \delta\mathcal{A}^m_\lambda\left(D_\kappa\mathcal{F}^n_{\mu\nu}\right)K_{mn}\,g^{-1\kappa\mu}\,g^{-1\lambda\nu}\,g^{\frac{1}{2}}$$

zdroje pole

$$J^{\alpha m} = \frac{1}{g^{\frac{1}{2}}}\frac{\delta S_{OSTATNÍ}}{\delta D^n_\alpha} K^{mn}$$

tenzor energie-hybnosti

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2c}{g^{\frac{1}{2}}}\frac{\delta S_{KP}}{\delta g^{-1\alpha\beta}} = \varepsilon_{KP}\left[\mathcal{F}^m_{\alpha\kappa}\mathcal{F}^n_{\beta\lambda}K_{mn}\,g^{-1\kappa\lambda} - \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}\,\mathcal{F}^m_{\mu\kappa}\mathcal{F}^n_{\nu\lambda}K_{mn}\,g^{-1\mu\nu}\,g^{-1\kappa\lambda}\right]$$

Bianchiho identity

$$D\wedge\mathcal{F} = 0$$

Zák. zákon zachování kalibračního toku

$$D_\mu J^{\mu m} = 0$$

$$\frac{c}{\varepsilon_{KP}} D_\mu J^{\mu m} = D_\mu D_\nu \mathcal{F}^m_{\kappa\lambda}\,g^{-1\mu\kappa}\,g^{-1\nu\lambda} = \frac{1}{2}\left(D_\mu D_\nu \mathcal{F}^m_{\kappa\lambda} - D_\nu D_\mu \mathcal{F}^m_{\kappa\lambda}\right) g^{-1\mu\kappa}\,g^{-1\nu\lambda} =$$

$$= \frac{1}{2}\left([\mathcal{F}_{\mu\nu},\mathcal{F}_{\kappa\lambda}]^m - R_{\mu\nu}{}^{\alpha}{}_{\kappa}\mathcal{F}^m_{\alpha\lambda} - R_{\mu\nu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}\mathcal{F}^m_{\kappa\alpha}\right) g^{-1\mu\kappa}\,g^{-1\nu\lambda} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}[\mathcal{F}_{\mu\nu},\mathcal{F}_{\kappa\lambda}]^m - \frac{1}{2}[\mathcal{F}_{\kappa\lambda},\mathcal{F}_{\mu\nu}]^m + Ric^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta} - Ric^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\right) = 0$$

Kalibrační transformace

lokální kalibrační grupa – Sect GM

působení elementu $g \in$ Sect BM

na $\mathbb{E}M$ $\quad E \to \tilde{E} = gE$

na BM $\quad h \to \tilde{h} = \mathrm{Ad}_g h$

na $\mathfrak{g}M$ $\quad \alpha \to \tilde{\alpha} = \mathrm{ad}_g \alpha$

působení na konexi (kov. der. na $\mathfrak{g}M$) je dáno podmínkou:

$$D \to \tilde{D} = D \oplus \mathfrak{a}$$

$$\widetilde{D\alpha} = \tilde{D}\tilde{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \tilde{D}\alpha = \mathrm{ad}_g (D\, \mathrm{ad}_{g^{-1}}\alpha) = \mathrm{ad}_g(\mathrm{ad}_{g^{-1}}(D\alpha + [D\ln g^{-1}, \alpha])) =$$
$$= D\alpha + [D\ln g^{-1}, \alpha]$$

tj. $\tilde{D} = D \oplus D\ln g^{-1}$

transformace tenzoru křivosti

$$[\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\alpha}] = \tilde{D}\wedge\tilde{D}\tilde{\alpha} = \tilde{D}\wedge\widetilde{D\alpha} = \widetilde{D\wedge D\alpha} = \mathrm{ad}_g D\wedge D\alpha = \mathrm{ad}_g [\mathcal{F}, \alpha] = [\mathrm{ad}_g \mathcal{F}, \tilde{\alpha}]$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathcal{F}} = \mathrm{ad}_g \mathcal{F}$$

Reálné Yang-Millsovská pole

Popis pole - geometrie konfigur. prostoru

YM pole typu (A, T) - řezy asociovaného f. b. AM

T je podreprezentací grupy SO na A, tj. na

na A existuje metrika $\underline{H}$ zachovávající se při akci T

$\underline{H}$ indukuje fibrovou metriku H - kinematické struktura

$H_{\underline{AB}} \in \mathcal{S}ect(A_2^0 M)$ $\qquad H = T_E \underline{H}$ $\qquad$ nezávislé na E

$H_{\underline{AB}} = H_{\underline{BA}}$ $\qquad H_{\underline{AB}}$ nedegenerované

$H_{\underline{AB}} = T_g{}^{\underline{M}}{}_{\underline{A}}\, T_g{}^{\underline{N}}{}_{\underline{B}}\, H_{\underline{MN}}$

$\Rightarrow \quad t_{\underline{m}}{}^{\underline{M}}{}_{\underline{A}}\, H_{\underline{MB}} + t_{\underline{m}}{}^{\underline{M}}{}_{\underline{B}}\, H_{\underline{AM}} = 0 \qquad$ tj. $\quad t_{\underline{m}} H = 0$

H-transpozice

$\phi^T{}_{\underline{A}} = H_{\underline{AM}}\, \phi^{\underline{M}} \qquad \phi^{T\underline{A}} = H^{-1\underline{AM}}\, \phi_{\underline{M}} \qquad M^{T\underline{A}}{}_{\underline{B}} = H_{\underline{AM}}\, M^{\underline{M}}{}_{\underline{N}}\, H^{-1\underline{BN}}$

$\Rightarrow \quad t_{\underline{m}}{}^T = -t_{\underline{m}} \qquad T_g{}^T \cdot T_g = \delta$

Působení kov. der. kalibr. pole na AM je dáno podmínkou

$D\, t_{\underline{m}} = 0 \qquad D\phi = \partial\phi + \frac{Q_{KP}}{\hbar c} A \cdot \phi \qquad A = \mathcal{A}^m\, t_{\underline{m}}$

fibrová metrika H je D-konstantní

$D H = 0 \qquad \Leftarrow \qquad DH = D(T_E \underline{H}) = T_E\, d\underline{H} + t_{D \ln E}\, \underline{H} = 0$

Akce YM pole

$$S_{YM} = -\frac{1}{2} \frac{\gamma_{YM}}{c} \int \left(D_{\underline{F}} \phi^{\underline{M}}\, D_{\underline{S}} \phi^{\underline{N}}\, H_{\underline{MN}}\, g^{-1FS} + \frac{c^2}{\hbar^2} \mu_{YM}^2\, \phi^{\underline{M}} \phi^{\underline{N}} H_{\underline{MN}} \right) g^{\frac{1}{2}}$$

Pohybové rovnice

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \qquad S = S_{GR} + S_{KP} + S_{YM} + S_{OSTATNÍ}$$

$$\Downarrow$$

$$-g^{-1FS} D_{\underline{F}} D_{\underline{S}} \phi^{\underline{M}} + \frac{c^2}{\hbar^2} \mu_{YM}^2\, \phi^{\underline{M}} = \frac{c}{\gamma_{YM}} J_{YM}^{\underline{M}}$$

variace akce

$$\frac{\delta S_{YM}}{\delta \phi^{\underline{M}}} = -\frac{\gamma_{YM}}{c} g^{\frac{1}{2}} \left(-g^{-1FS} D_{\underline{F}} D_{\underline{S}} \phi^{\underline{N}} + \frac{c^2}{\hbar^2} \mu_{YM}^2\, \phi^{\underline{N}} \right) H_{\underline{MN}}$$

zdroje

$$J^{\underline{M}}_{YM} = \frac{1}{\mathfrak{g}^{-1}} H^{-1\underline{MN}} \frac{\delta S_{OSTATNÍ}}{\delta \phi^{\underline{N}}}$$

$$J^{\mu\underline{m}}_{KP} = \frac{1}{\mathfrak{g}^{-1}} K^{-1\underline{mm}} \frac{\delta S_{YM}}{\delta D^{\underline{m}}_{\mu}} = -\frac{\gamma_{YM}}{c} K^{-1\underline{mm}} t_{\underline{m}}{}^{\underline{M}}{}_{\underline{K}} \phi^{\underline{K}} D_{\nu} \phi^{\underline{N}} H_{\underline{MN}} g^{-1\mu\nu}$$

$$\Uparrow$$

$$\int \frac{\delta S_{YM}}{\delta D^{\underline{m}}_{\mu}} \delta A^{\underline{m}}_{\mu} = -\frac{1}{2}\frac{\gamma_{YM}}{c} \int \left(\delta A_{\mu}{}^{\underline{M}}{}_{\underline{K}} \phi^{\underline{K}} D_{\nu} \phi^{\underline{N}} H_{\underline{MN}} g^{-1\mu\nu} + D_{\mu} \phi^{\underline{M}} \delta A_{\nu}{}^{\underline{N}}{}_{\underline{K}} H_{\underline{MN}} g^{-1\mu\nu} \right) \mathfrak{g}^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{\gamma_{YM}}{c} \int \delta A^{\underline{m}}_{\mu} t_{\underline{m}}{}^{\underline{M}}{}_{\underline{K}} \phi^{\underline{K}} D_{\nu} \phi^{\underline{N}} H_{\underline{MN}} g^{-1\mu\nu} \mathfrak{g}^{\frac{1}{2}}$$

tenzor EH

$$T_{YM\,\mu\nu} = \frac{\gamma_{YM}}{c} \left\{ D_{\mu} \phi^{\underline{M}} D_{\nu} \phi^{\underline{N}} H_{\underline{MN}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(D_{\kappa} \phi^{\underline{M}} D_{\lambda} \phi^{\underline{N}} g^{-1\kappa\lambda} H_{\underline{MN}} + \frac{c^2}{\hbar^2} M^2_{YM} \phi^{\underline{M}} \phi^{\underline{N}} H_{\underline{MN}} \right) \right\}$$

Působení kalibrační transformace

$$\phi \longrightarrow \tilde{\phi} = T_g \phi$$

Komplexní Yang-Millsovské pole

geometrie konf. prostoru

$\mathbb{E}_L M = (T_{\mathbb{M}}\, \mathbb{E}_L) M$

$\mathbb{E}_R M = (T_{\mathbb{M}}\, \mathbb{E}_R) M$

$\bar{\ } : \mathbb{E}_L M \leftrightarrow \mathbb{E}_R M$ definováno po fibrech

$h_{\bar{A}A} \in \mathcal{S}ect\,(\mathbb{E}^{00}_{11} M)$ $\quad h = T_E\, \underline{h}$ $\quad \underline{h}$ skal. souč. na $\mathbb{E}$

$T_g h = h$ tj. $T_g^{+} = T_g^{-1}$

$T_{\exp a} = \exp(i t_a)$ $\quad t_a^{+} = t_a$

reálná varianta

$\mathbb{E}^{\mathbb{R}} M = (T_{\mathbb{M}}\, \mathbb{E}^{\mathbb{R}}) M = (\mathrm{Re}\ \mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R) M$

$H \in \mathcal{S}ect\,(\mathbb{E}^{\mathbb{R}\,0}_{\ \ 2} M)$

indukují se všechny vlastnosti z vekt. pr.

popis pole

$\psi \in \mathbb{E}_L M$ pole popisující hmotu (částice)

$\bar{\psi} \in \mathbb{E}_R M$ pole popisující antihmotu (antičástici)

$\Psi = \psi \oplus \bar{\psi} \in \mathbb{E}^{\mathbb{R}} M$ reálný popis hmoty + antihmoty

$\psi, \bar{\psi}, \Psi$ obsahují stejnou informaci
používá se buď
$\psi, \bar{\psi}$ jako dvojice nezávislých komplexních proměnných
Ψ jako jedna nezávislá reálná proměnná

Akce YM pole

$$S = -\frac{\gamma_{YM}}{c}\int \left(D_\mu \bar{\psi}^{\bar{M}}\, D_\nu \psi^N\, h_{\bar{M}N}\, g^{-1\mu\nu} + \frac{c^2}{\hbar^2} \mu_{YM}^2\, \bar{\psi}^{\bar{M}} \psi^N h_{\bar{M}N} \right) g^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\gamma_{YM}}{c}\int \left(D_\mu \Psi \cdot H \cdot D_\nu \Psi\, g^{-1\mu\nu} + \frac{c^2}{\hbar^2} \mu_{YM}^2\, \Psi \cdot H \cdot \Psi \right) g^{\frac{1}{2}}$$

působení kalibr. pole

$D\bar{\psi} = \overline{D\psi}$ $\qquad Dh = 0$ $\qquad Dt = 0$ $\qquad D\bar{t} = 0$

$D\psi = \partial\psi + i\frac{Q_{YM}}{\hbar c} A \cdot \psi$ $\qquad A = \mathcal{A}^m t_m$ $\qquad A^{+} = A$

$D\bar{\psi} = \partial\bar{\psi} - i\frac{Q_{YM}}{\hbar c} \bar{A} \cdot \bar{\psi}$ $\qquad \bar{A} = \mathcal{A}^m \bar{t}_m$ $\qquad \bar{A}^{+} = \bar{A}$

$D\Psi = \partial\Psi + \frac{Q_{YM}}{\hbar c} \mathbf{A} \cdot \Psi$ $\qquad \mathbf{A} = \mathcal{A}^m t_m = (iA) \oplus (-i\bar{A})$ $\qquad \mathbf{A}^{T} = -\mathbf{A}$

$\mathbf{A}^{*} = \mathbf{A}$

Pohybové rovnice

$$\frac{\delta S}{\delta \psi} = 0 \qquad \frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}} = 0 \qquad \text{nebo} \qquad \frac{\delta S}{\delta \Psi} = 0$$

$$S = S_{GR} + S_{KP} + S_{KGM} + S_{OSTATNÍ}$$

$\Downarrow$

$$-g^{-1\mu\nu} D_\mu D_\nu \psi^M + \frac{c^2}{\hbar^2} \mu_{KGM}^2 \psi^M = \frac{c}{\gamma_{KGM}} J^M_{KGM}$$

+ kalibrační podmínka.

variace akce

$$\frac{\delta S_{KGM}}{\delta \psi^M} = -\frac{\gamma_{KGM}}{c}\left[-g^{-1\mu\nu} D_\mu D_\nu \bar{\psi}^{\bar{N}} + \frac{c^2}{\hbar^2}\mu^2_{KGM} \bar{\psi}^{\bar{N}}\right] h_{\bar{N}M}$$

$$\frac{\delta S_{KGM}}{\delta \bar{\psi}^{\bar{M}}} = -\frac{\gamma_{KGM}}{c}\left[-g^{-1\mu\nu} D_\mu D_\nu \psi^N + \frac{c^2}{\hbar^2}\mu^2_{KGM} \psi^N\right] h_{N\bar{M}}$$

zdroje

$$J^M_{KGM} = \frac{1}{g^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta S_{OSTATNÍ}}{\delta \bar{\psi}^{\bar{M}}} h^{-1\bar{M}M} = \frac{1}{g^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\delta S_{OSTATNÍ}}{\delta \psi}\right)^{+M}$$

$$J^{\mu m}_{KP} = -i\frac{\gamma_{KGM}}{c} K^{-1mn}\left[t_n{}^M{}_N \psi^N D_\nu \bar{\psi}^{\bar{M}} - \bar{t}_n{}^{\bar{M}}{}_{\bar{N}} \bar{\psi}^{\bar{N}} D_\nu \psi^M\right] h_{M\bar{M}} g^{-1\mu\nu}$$

tenzor E-H

$$T_{\mu\nu} = 2\frac{\gamma_{KGM}}{c}\left[D_\mu \bar{\psi} \cdot h \cdot D_\nu \psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\left(D_\kappa \bar{\psi} \cdot h \cdot D_\lambda \psi\, g^{-1\kappa\lambda} + \frac{c^2}{\hbar^2}\mu^2_{KGM} \bar{\psi} \cdot h \cdot \psi\right)\right]$$

Působení kalibrační transformace

$$\psi \to \tilde{\psi} = T_g \psi$$

$$\bar{\psi} \to \tilde{\bar{\psi}} = \bar{T}_g \bar{\psi}$$

$$\Psi \to \tilde{\Psi} = T_g \Psi = (T_g \psi) \oplus (\bar{T}_g \bar{\psi}) \qquad \Psi = \psi \oplus \bar{\psi}$$